Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 11, 1, 91–103(1995)

FIABILIDAD DE LAS CARGAS CRÍTICAS DE LÁMINAS DELGADAS ESTUDIADAS POR ENSAMBLAJE DE ELEMENTOS PLANOS TRIANGULARES EN EL M.E.F.

J.M. MARTÍNEZ JIMÉNEZ
y
R. LÓPEZ PALANCO

Departamento de Mecánica, Departamento de Medios Continuos,
E.U. Politécnica, Universidad de Córdoba,
E.T.S.A., Universidad de Sevilla

RESUMEN

El presente trabajo tiene por objeto poner de relieve el alto grado de confianza que podemos depositar en el valor de las cargas críticas calculadas en láminas, asismiladas por ensamblaje de elementos planos (método de E.F.) triangulares tipo placa, sometidas a cargas gravitatorias uniformemente distribuidas.

SUMMARY

The objective of the current work is to emphasize the high grade of confidence that we can entrust in the value of the calculated critical loads in shells, assimulated by the assembly of plan elements (E.F. method) triangular plates, subject to uniformly gravitatory distributed heavy loads.

DETERMINACIÓN DE CARGAS CRÍTICAS MEDIANTE EL M.E.F.

Como sabemos, la obtención de las ecuaciones de equilibrio, siguiendo principios energéticos, es consecuencia de la estacionariedad del funcional energía potencial total del sistema

$$\delta \, E_t \;=\; \Omega$$

que cuando E_t es un funcional de segundo grado nos conduce a un sistema de ecuaciones $K \cdot U = P$. Esta condición debe acompañarse, para que el equilibrio sea estable, de

Recibido: Junio 1995

 ISSN 0213–1315

la de mínimo $\delta^2 E > \Omega$. Para todos los valores de la energía que hagan $\delta^2 E_t < \Omega$ el equilibrio será inestable y el punto de bifurcación se dará para $\delta^2 E = \Omega$.

Teniendo en cuenta que:

$$\delta^2 \; E_t \;=\; \delta U^T \cdot k_t \cdot \delta U$$

La situación de equilibrio se producirá cuando $k_t \delta U$ sea idénticamente nula.

Si recordamos que $k_t = k_0 + k_l + k_\sigma$, en donde k_0 es la matriz de rigidez correspondiente a pequeñas deformaciones, k_l la de grandes deformaciones y k_σ la de tensiones iniciales y notamos que k_l será idénticamente nula en aquellas situaciones en que por no producirse flexiones no sufren modificación las curvaturas, podremos poner, en el caso de equilibrio indiferente, si además apreciamos que k_σ es proporcional al valor de las cargas aplicadas:

$$(k_0 \;+\; \lambda \; k_\sigma) \;\cdot\; \delta U \;\equiv\; \Omega$$

en donde λ, que recibe el nombre de factor de estabilidad, nos proporciona la carga crítica mediante $P_{\text{crit}} = \lambda \cdot P$, siendo P el valor de la carga para la que se ha obtenido k_σ.

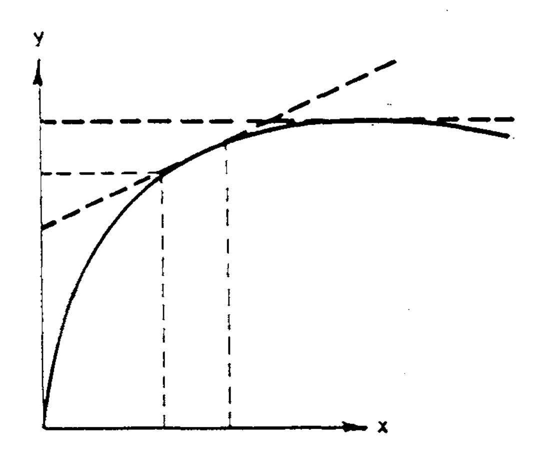
Para mejor comprender la afirmación relativa a la nulidad de k_l, en la situación especificada, pensemos en una placa sometida a esfuerzos de compresión contenidos en su propio plano. En tanto las cargas sean bajas o moderadas, los puntos de la placa sólo sufrirán corrimientos contenidos en el propio plano de la placa y por ello la componente (W) del corrimiento según la normal, es nula para todo punto de la placa. Puesto que son los términos no lineales de las deformaciones, que se expresan a través del desplazamiento lateral W, los que dan lugar a los elementos de k_l, quiere esto decir que en tanto el plano medio no sufra flexión, tanto W como sus derivadas serán nulas en todos los puntos, y en consecuencia k_l es idénticamente nula.

La misma consideración cabe hacer en el caso de láminas si en cada punto consideramos el plano tangente a la superficie y un diferencial de área en equilibrio en el entorno del punto.

DETERMINACIÓN DE CARGAS DE PANDEO

La obtención de la carga de pandeo es más sencilla de concepto aunque más complicado el proceso. Consiste en determinar los corrimientos que corresponden a cada escalón de carga según las ecuaciones no lineales de equilibrio y determinar para qué escalón se hacen indeterminadas o muy grandes. El caso de corrimientos indeterminados corresponderá en el diagrama de equilibrio al punto de tangente horizontal, pero antes podemos haber llegado a un punto de tangente muy tendida, de tal modo que a pequeños incrementos de carga corresponden grandes incrementos en los corrimientos.

En cualquier caso, la carga crítica es una cota superior de la carga de pandeo.



FACTORES DE INCERTIDUMBRE EN LAS CARGAS CRÍTICAS CALCULADAS

Es conocido que el cálculo de una lámina puede acometerse aproximando la superficie real mediante otra constituida por elementos planos (tipo placa), con lo que a las aproximaciones ya establecidas en M.E.F. añadimos otra adicional geométrica que se traduce, por ejemplo al efectuar el ensamblaje cuando todos los elementos que concurren en un nodo son coplanares, en la introducción de un sistema de rigidez a la rotación ficticios (aunque existen otras alternativas) en alguna ocasión obtenidos con la condición de que el equilibrio no se perturbará en coordenadas locales.

Con carácter general, ya sea el elemento plano o curvo, otro factor cuya influencia está poco discutida es el de la elección del orden de integración y en su caso la elección de la integración reducida, ya que el buen comportamiento de un determinado artificio en cálculo lineal no necesariamente tiene que repetirse en un cálculo no lineal ni puede extrapolarse a otras situaciones.

Así pues, y sin que de ninguna manera hayamos pretendido agotar el recuento de los factores que podrían crear incertidumbre acerca de la validez de los cálculos realizados, vemos que se hace necesario tanto la comprobación "a posteriori" de resultados como el control de aspectos numéricos, estrechamente relacionados con las bases teóricas, a lo largo del proceso de cálculo.

FACTORES DE FIABILIDAD

En línea con la última aseveración realizada estimamos que, puesto que en el cálculo de cargas críticas partimos de la expresión

$$(k_0 + \lambda\, k_\sigma) \cdot \delta U \equiv \Omega$$

que nos permite para un determinado nivel de cargas calcular autovalores y vectores

propios, y con ello el menor de los autovalores que es el que a nosotros nos interesa como factor de estabilidad, es claro que la expresión anterior deberá proporcionarnos un valor estable de λ siempre que k_l sea idénticamente nula. Por tanto si controlamos el valor de los elementos de la matriz k_l estaremos en condiciones de estimar si en principio el valor de λ obtenido es fiable, por supuesto con independencia del algoritmo elegido para la deterinación del menor de los autovalores (nosotros hemos usado dos algoritmos distintos y comprobado la coincidencia del valor proporcionado).

Como quiera que desde el primer escalón de carga, de un proceso de cálculo no lineal, aparecen corrimientos que producen flexiones, aunque pequeñas, de la lámina, es de todo punto imposible que la matriz k_l sea idénticamente nula, por lo que si queremos que nos sirva como parámetro de control habremos de relajar la condición y sustituirla por la de que sea casi nula. Asimismo y puesto que para que una matriz sea nula han de serlo todos sus elementos, nosotros vamos a relajar esta otra condición y en su lugar pondremos la de que la media aritmética de todos sus elementos sea prácticamente nula (valor muy pequeño por ejemplo en comparación con la media de los elementos de la matriz k_0).

En relación con la comprobación "a posteriori" de los resultados obtenidos, y sin salirnos del M.E.F., una buena alternativa consiste en la realización de cálculos no lineales, con la consiguiente determinación de la carga de colapso, con otros tipos de elementos y con un programa debidamente contrastado.

DESCRIPCIÓN DE ELEMENTOS Y PROGRAMAS DE ELEMENTOS FINITOS

Dos son los tipos de elementos que hemos usado en el desarrollo del presente trabajo y también dos son los programas utilizados. El desarrollo de uno de los programas ha sido confeccionado por los autores y por tanto es un programa abierto en el sentido de admitir implementaciones y correcciones y por supuesto está muy contrastado[5y6]. El elemento triangular plano cuyo buen comportamiento, a nivel general ya tenemos comentado y en particular para el caso de determinación de cargas críticas vamos a poner de manifiesto, es un elemento tipo placa (que denominamos T.P.) de 3 nodos con 6 grados de libertad por nodo que se obtiene por conjunción del triángulo de deformación constante para las componentes del corrimiento según el propio plano de elementos y el triángulo incompatible para flexión de placas de nueve grados de libertad[1].

El otro programa es el conocido ANSYS de la casa Swanson Analysis System, Inc. y el elemento escogido es el tipo 63 de la biblioteca de elementos cuyas características son:

Tipo: Elastic Quadrilateral Shell
N° de nodos: 4
G de L por nodo: 6
Opciones de utilización: Stress stiffening, Large deflection.

ANÁLISIS DE CASOS PRÁCTICOS

Con objeto de centrarnos en un tipo concreto de lámina hemos adoptado para su análisis Láminas de proyección rectangular y "Pendiente suave" en las que se suponen se cumplen los siguientes requisitos:

$$R_{\min} \geq 20 \cdot e \quad ; \quad a \geq 5 \cdot h$$

Siendo $R_{\min}$ el menor de los radios de curvatura, e el espesor, a la dimensión menor de la planta y h la diferencia de cota máxima entre puntos de la lámina. Dentro de este tipo hemos escogido los que tengan por superficie: superficie esférica, paraboloide elíptico, paraboloide hiperbólico, velaria paraboloidal y velaria cosenoidal[5y11] y como condiciones de contorno: empotradas o articuladas fijas en todo el borde. En cuanto a las dimensiones de la planta y alturas las de 20 × 20m y 4m o 1'5m.; espesor 0'08m, coeficiente de poison 0'25 y módulo de elasticidad $2'1{\cdot}10^6 T/m^2$.

Por último mencionar que la carga a que se someten es gravitatoria uniforme.

Para las superficies mencionadas y con el elemento T.P. los resultados obtenidos son

M.E.F.

Paraboloide elíptico s/planta cuadrada 20×20×0'08×4m
4 bordes empotrados μ =0'25, E =$2'1{\cdot}10^6 T/m^2$

Con T.P. (3/1993)

Carga (T/m^2)	−5	−10	−20	−40	−80
Factor estabilidad	3'791	1'90	1'12	0'431	0'92
Carga crítica	18'955	19'0	22'40	17'240	73'60
Med. eleme. K_0	1992'31	1992'31	1992'31	1992'31	1992'31
Med. eleme. K_l	0'010	0'054	0'852	31'52	132'70
Autovalor	-0'263	-0'525	-0'887	-2'319	-1'078
Corrim. punto central	0'00709	0'0148	0'0326	0'102 (del mismo signo en toda supf.)	0'104 (con invers. de corr. en alg. puntos)

M.E.F.

Paraboloide hiperbólico s/planta cuadrada $20\times20\times0'08\times4$m
4 bordes empotrados $\mu=0'25$, $E=2'1\cdot10^6$T/m^2

Con T.P. (3/1993)

Carga (T/m^2)	$q_0=+4$	+8	+16	+32
Factor estabilidad	4'18	2'07	-1'18	-0'849
Carga crítica	-16'72	-16'56	-18'88	27'168
Med. eleme. K_0	1921'95	1921'95	1921'95	1921'95
Med. eleme. K_l	0'033	0'065	0'29	13'01
Autovalor	0'034 -0'239	-0'0377 -0'4825	0'806 0'841	1'190 1'177
Corrim. punto central	-0'0219	-0'04451	-0'093 (todos de = signo)	-0'237 (con invers. de signo en alg. puntos)

Velaria Cosenoidal $P_0=-2$T/m^2, $E=\times2'1\cdot10^6$, $\mu=0$, $e=0'08$m
empotrada 4 bordes: $20\times20\times4$

Cálculo con T.P.

Carga	-2	-4	-8	-16	-32	-64
Factor estabilidad	7'98	3'657	1'655	1'13	1'55	0'76
Carga crítica	15'96	14'628	13'24	18'23	49'6	49'2
Med. eleme. K_0	1917	1917	1917	1917	1917	1917
Med. eleme. K_l	0'007	0'038	0'228	3'92	341	330
Autovalor	0'125	0'273	0'604	0'877	0'645	1'30

M.E.F.

Lámina esférica s/planta cuadrada $20\times20\times0'08\times4$m
empotrada 4 bordes μ =0'25, E =2'1·10^6T/m^2

Con T.P.

Carga (T/m^2)	−4	−8	−16	−32
Factor estabilidad	3'68	1'8448	0'8969	-3'71
Carga crítica	-14'72	-14'7584	-14'35	+118'72
Med. eleme. K_0	1968'45	1968'45	1968'45	1968'45
Med. eleme. K_l	0'009	0'05319	0'6452	14255
Autovalor	-0'27159	-0'54167	-1'113	0'26907
Corrim. punto central	-0'01331	-0'03009	-0'08446	+15'24

Velaria paraboloidal $20 \times 20 \times 4$ $P_0 = -3$T/m^2, $\mu = 0'25$, $E = 2'1 \times 10^6$, $e = 0'08$
empotrada 4 bordes

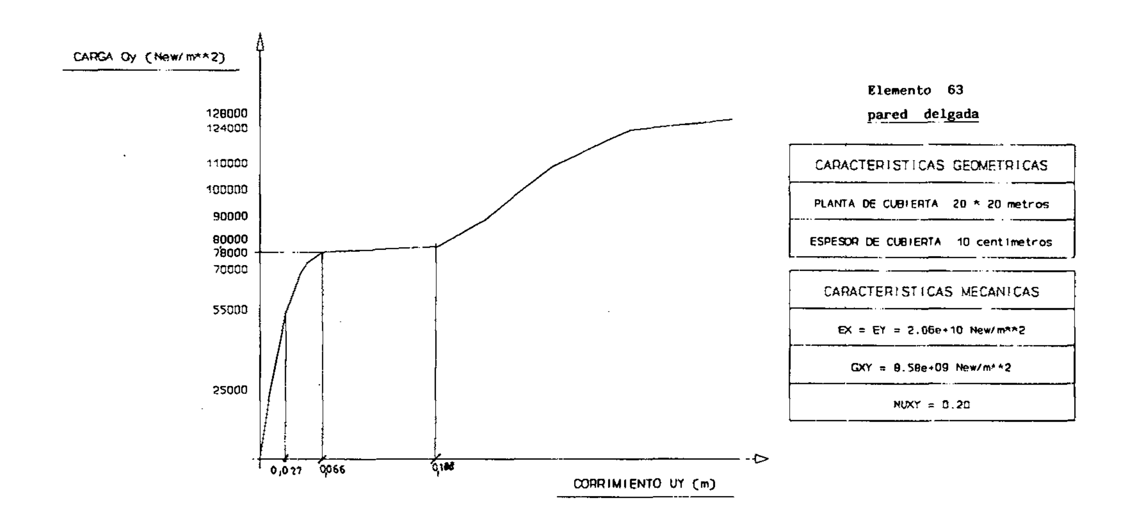
Cálculo con T.P. (tipo placa)

Carga (T/m^2)	-3	-6	-9	-12	-15	-18	-21	-24	-27
Factor estabilidad	7'18	3'56	2'38	1'804	1'479	1'364	1'357	1'164	-1'46
Carga crítica	21'3	21'6	21'6	21'65	22'18	24'48	28'35	27'84	$k_T = k_0 + k_L + k_\sigma$ si $k_T\ d_L - \Omega$, con $k_T = 0$ $k_0 = \lambda - k_\sigma$
Med. eleme. K_0	1869	1869	1869	1869	1869	1869	1869	1869	
Med. eleme. k_l	0'011	0'029	0'066	0'15	0'43	1'18	2'26	8'80	

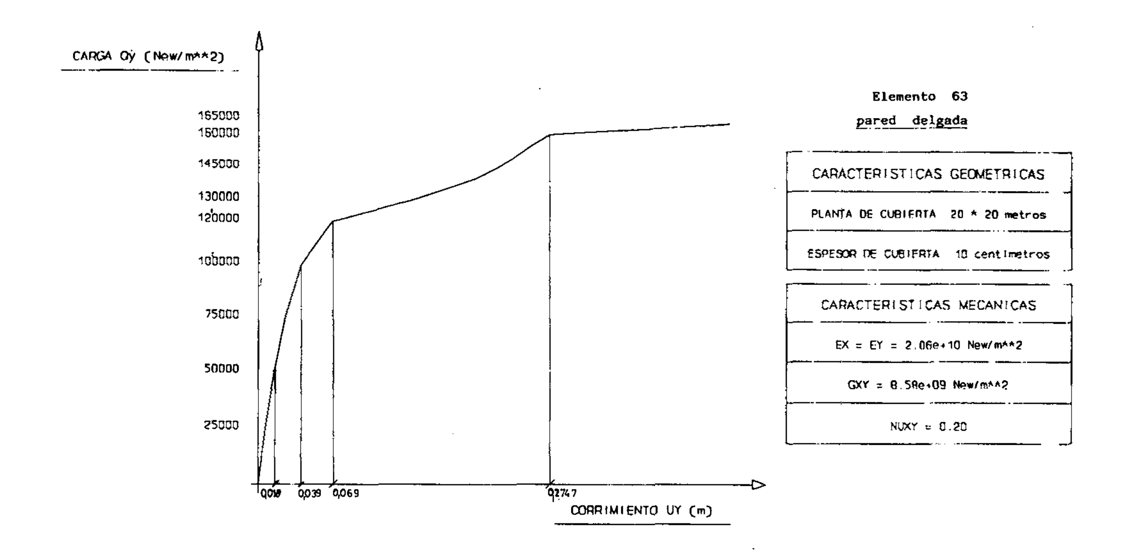
podemos apreciar que en todos los casos en tanto el parámetro "media de elementos de k_l" sea poco apreciable el valor calculado para la carga crítica es un valor estable y

por tanto el valor presumible de cálculo, (en los cuadros precedentes hemos sombreado los escalones de carga en que dejan de cumplirse los citados requisitos).

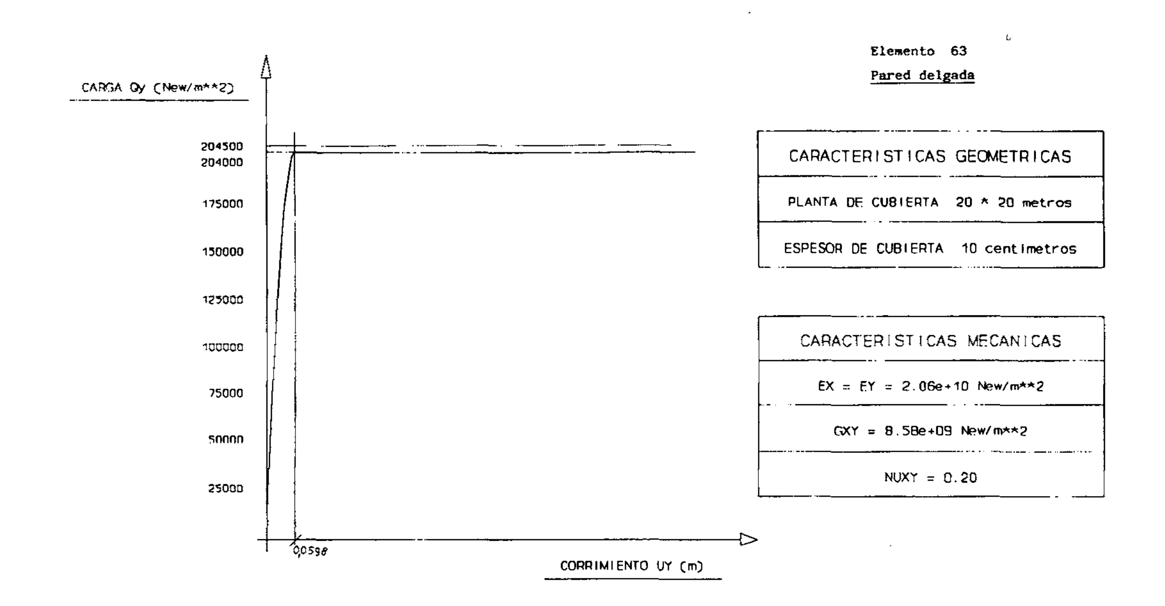
Para las mismas superficies los diagramas de equilibrio obtenidos con el elemento Stif 63 son



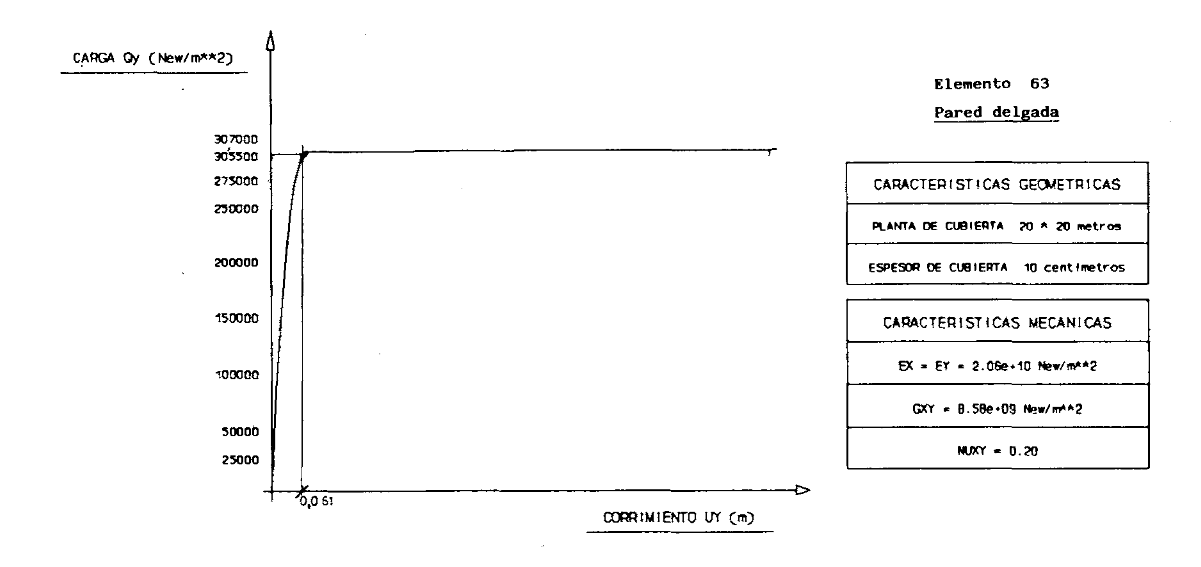
Velaria Cosenoidal apoyada (altura: 4 metros)



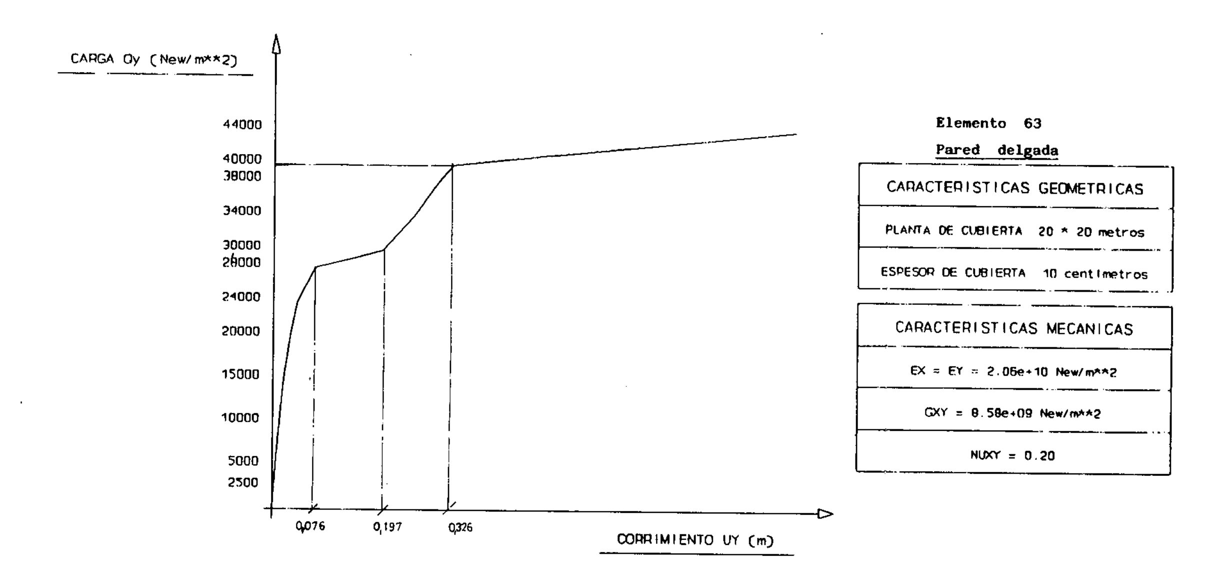
Velaria–Cosenoidal empotrada (altura: 4 metros)



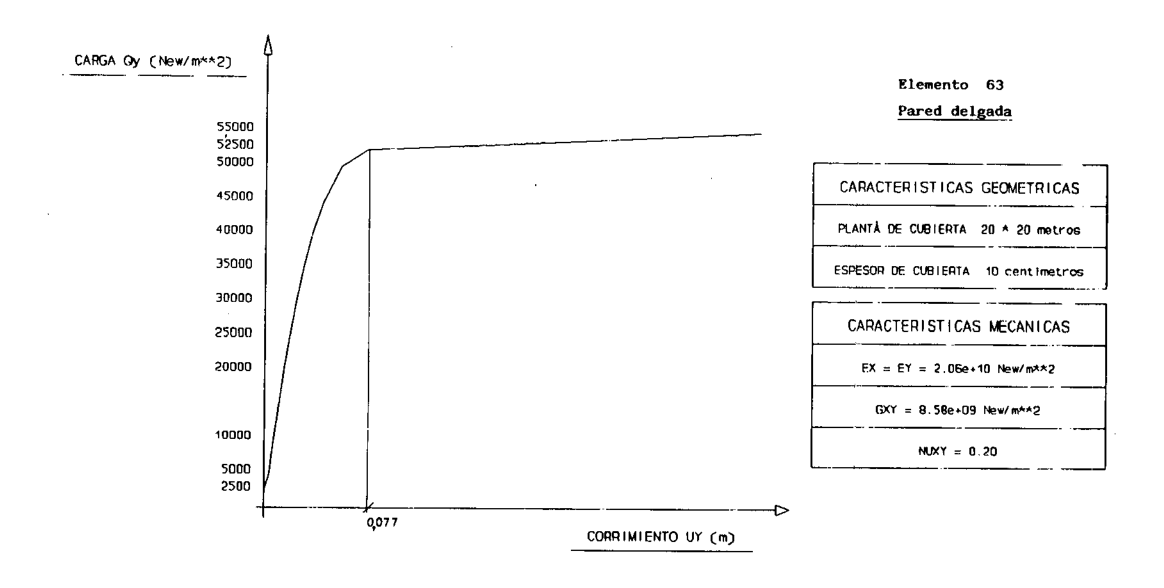
Velaria–Paraboloidal apoyada (altura: 4 metros)



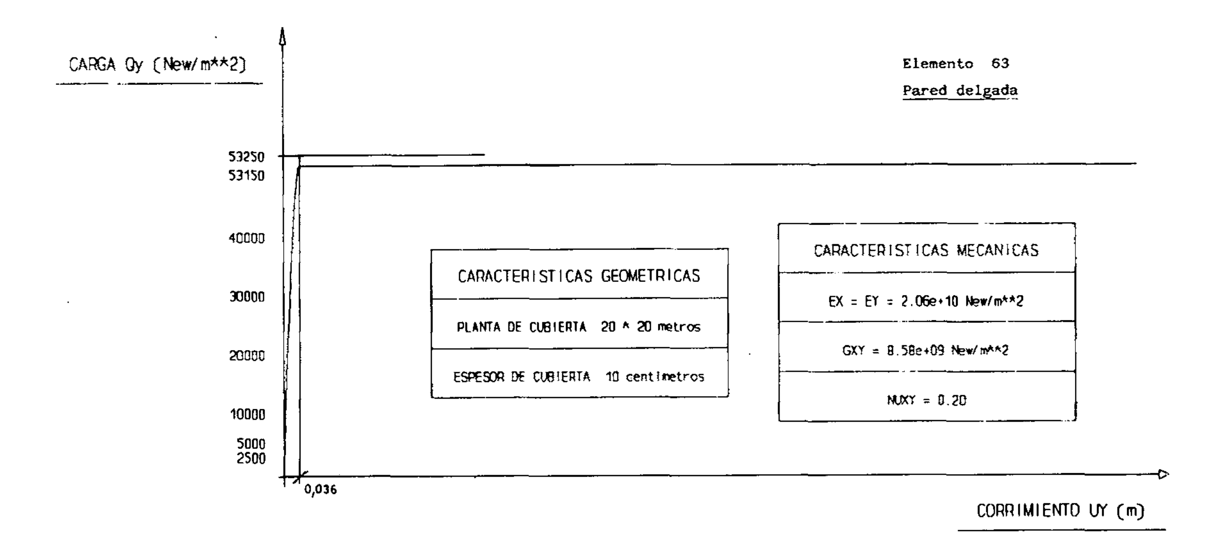
Velaria–Paraboloidal empotrada (altura: 4 metros)



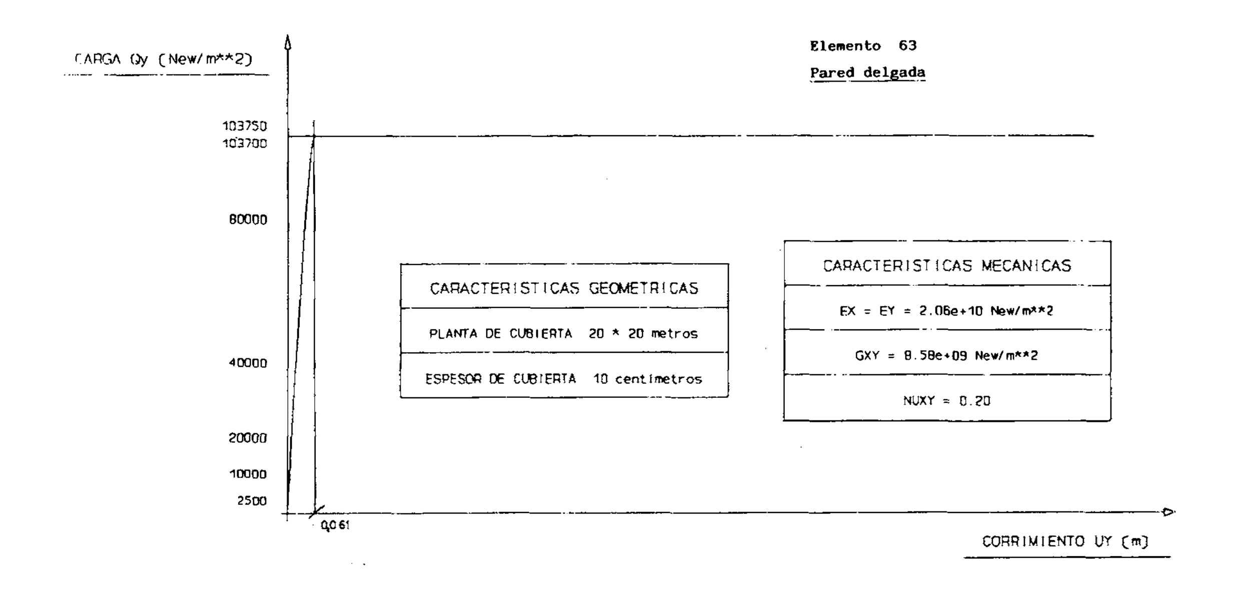
Velaria–Cosenoidal apoyada (altura: 1.5 metros)



Velaria–Cosenoidal empotrada (altura: 1.5 metros)



Velaria–Paraboloidal apoyada (altura: 1.5 metros)



Velaria–Paraboloidal empotrada (altura: 1.5 metros)

de lo que podemos obtener, de acuerdo con el punto 2, las cargas de pandeo.

Ambas cargas, críticas y de colapso, se resumen en el cuadro siguiente

Carga	Superficie Esférica		Paraboloide Elíptico		Paraboloide Hiperbólico	
	$h = 4$m Empot.	$h = 4$m Artic.	$h = 4$m Empot.	$h = 4$m Artic.	$h = 4$m Empot.	$h = 4$m Artic.
Carga crítica (TP)	+14'7 T/m^2	9'6T/m^2	19T/m^2	11'3T/m^2	16'7T/m^2	10'1T/m^2
Carga de colapso (stif 63)	13-14 T/m^2	7-8T/m^2	21-22T/m^2	12-14T/m^2	17-19T/m^2	10-12T/m^2

Carga	Velaria Paraboloidal			
	$h = 4$m Empot.	$h = 1'5$m Empot.	$h = 4$m Artic.	$h = 1'5$m Artic.
Carga crítica (TP)	21'28 T/m^2	6'43T/m^2	12'6T/m^2	5'5T/m^2
Carga de colapso (stif 63)	30'5 T/m^2	10T/m^2	20T/m^2	5'3T/m^2

Carga	Velaria Paraboloidal			
	$h = 4$m Empot.	$h = 1'5$m Empot.	$h = 4$m Artic.	$h = 1'5$m Artic.
Carga crítica (TP)	15'18T/m^2	4'45T/m^2	10'25T/m^2	3'5T/m^2
Carga de colapso (stif 63)	10-14T/m^2	5-6T/m^2	7-8T/m^2	3-4T/m^2

CONCLUSIONES

Con cuanto antecede, complementado con la eficiencia demostrada en la determinación de cargas críticas en los casos de placas sometidas a cargas en su propio plano y superficies cilíndricas con carga en la dirección de las generatrices[5], concluimos que las cargas críticas calculadas en láminas asimiladas por ensamblaje de elementos planos, mediante elementos triangulares son altamente fiables y por tanto de utilidad directa en el cálculo.

REFERENCIAS

1. O.C. Zienkiewicz, *"El Método de los Elementos Finitos"*, Reverté, (1980).
2. B.E. Greene y otros, "Application of the Stiffness method to the analysis of shell structures", *P.A.C.A.S. Mech. Eng.*, Los Angeles, (1961).
3. C.J. Parekh, "Arch dams analysed by a linear finite element shell solution program", *P.S.A.D.I.C. Ing.*, Londres, (1968).
4. F. Escrig, "Pandeo de paraboloides hiperbólicos", *T.D.*, Sevilla, (1980).
5. J.M. Martinez, "Pandeo de Estructuras laminares velarias", *T.D.*, Valencia, (1988).
6. J.M. Martinez, "Elemento triangular curvo isoparamétrico de 30 G.D.L. para Cálculo de placas y láminas", *X Congreso N. de Ing. Mec.*, Madrid, (1992).
7. B. Ballesteros, "Parabolic velaroidal Shell", *Cong. IRSS*, Budapest, (1966).
8. I. Canals, "The velaria shell", *Bulletin of the IASS no 14*, I.E.T.C.C.
9. H.P. Harrestein, "Funicular shell", *Bulletin of the IASS no 24*.
10. Ansys. Manual de usuario.
11. A. García Garmendia, "Utilización de superficies velarias como estructuras laminares sobre un rectángulo y su cálculo por diferencias finitas", *T.D.*, Valencia, (1979).